

9/3/2017

Ορισμός: Έστω $A, B \in F^{n \times n}$. Οι A, B λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντίστροφος $P \in F^{n \times n}$ ώστε $B = P^{-1}AP$ (2)

Παρατήρηση: Έστω $k \geq 1$. Τότε (2) $\Rightarrow B^k = P^{-1}A^kP$ και $A^k = PB^kP^{-1}$
Επί του $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Ο A λέγεται ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΣ αν υπάρχει $P \in F^{n \times n}$ αντίστροφος ώστε $P^{-1}AP$ διαγώνιος.

Παρατήρηση: Αν A διαγώνιος, για $P = I_n$ έχουμε $P^{-1}AP = A$ διαγώνιος. Άρα κάθε διαγώνιος είναι διαγωνίσιμος. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι διαγωνίσιμος στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση: Αν $A, B \in F^{n \times n}$ όμοιοι, τότε A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν B διαγωνίσιμος.

Απόδ.: Ίσχυει ότι A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν A όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα $C^{n \times n}$. Αρκεί να δείξουμε " A όμοιος B " έχει ιδιότητες στο $F^{n \times n}$.

i) " A όμοιος με A " γιατί $A = I_n^{-1} A I_n$

ii.) Υποθέτουμε A όμοιος με B . Άρα υπάρχει $P \in F^{n \times n}$ αντίστροφος με $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (Q^{-1})BQ$ όπου $Q = P^{-1}$. Άρα B όμοιος με A .

iii.) Υποθ. A όμοιος με B και B όμοιος με C .

Άρα υπάρχουν $P_1, P_2 \in F^{n \times n}$ αντίστροφος με

$$\left. \begin{array}{l} B = P_1^{-1}AP_1 \\ C = P_2^{-1}BP_2 \end{array} \right\} \Rightarrow C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)$$

Άρα C όμοιος με A .

Ερώτηση: Πότε 2 τετρ. πίνακες με την ίδια διαστάση είναι όμοιοι;

Απάντηση: Υπάρχει κανονοποίηση απάντησης αλλά για λόγους χρόνου θα δώσουμε μόνο μερική απάντηση στο ερώτημα.

Πρόταση: Έστω $A, B \in F^{n \times n}$. Υποθέτουμε με χαρακτηριστικά πολυώνυμα $\chi_A(x), \chi_B(x) \in F[x]$. Αν A, B όμοιοι τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (Το αντίστροφο δεν ισχύει)

Παράδειγμα: Είναι οι πίνακες $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ όμοιοι;

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1$$

$$\chi_B(x) = \det(B - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$$

Άρα $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$ συνεπώς από την πρόταση A, B όχι όμοιοι.

Παράδειγμα: Είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$;

Θα δείξουμε ότι δεν είναι. Έστω ότι είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα $C = \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\text{Έχουμε } \chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

$$\chi_C(x) = \det(C - xI_2) = \begin{vmatrix} c_1 - x & 0 \\ 0 & c_2 - x \end{vmatrix} = (x - c_1)(x - c_2).$$



Αρα $\chi_A(x) \neq \chi_C(x)$ γιατί το πρώτο πολυνομικό δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$, ενώ το δεύτερο έχει τη ρίζα 1. Συνεπώς αντίστοιχα.
 Υποθ. A, C άμοιροι, άρα από πρόταση $\chi_A(x) = \chi_C(x)$.

Παράδειγμα: Για $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-1)^2$ Δεν είναι άμοιροι $P^{-1}AP = P^{-1}I_2P = I_2 \neq B$.

Ερώτημα: Έστω V δ.χ./ F πεπερ. διαστάσης. $f: V \rightarrow V$ γραμμική, $e = (e_1, \dots, e_n)$
 $g = (g_1, \dots, g_n)$ δυο βάσεις του V . Θέτουμε $A = [f]_e^e$, $B = [f]_g^g$
 Πανερά, $A, B \in F^{n \times n}$. Πως συνδέονται;

Πρόταση: Οι A, B είναι άμοιροι.

Παρατήρηση: 'Εκτός και το αντίστροφο, Αν $C \in F^{n \times n}$ άμοιος με τον A , τότε υπάρχει βάση $h = (h_1, \dots, h_n)$ του V με $C = [f]_h^h$

απόδ. πρόταση: $[f]_g^g = [\text{id}_V \circ f \circ \text{id}_V]_g^g =$

$$= [\text{id}_V]_e^g [f]_e^e [\text{id}_V]_g^e = ([\text{id}_V]_g^e)^{-1} [f]_e^e ([\text{id}_V]_g^e) = P^{-1}AP.$$

$$[\text{id}_V]_e^e$$

απόδ. παρατήρηση: Υπάρχει $P \in F^{n \times n}$ αντίσρ. με $C = P^{-1}AP$

Θέτουμε $Q = P^{-1} = [q_{ij}]$. Ορίζουμε $h = (h_1, \dots, h_n)$ με $h_i = \sum_{j=1}^n q_{ji} e_j$.
 Τότε h βάση του V και μας δίνουν το ζητούμενο.

Προβλημα: Αν V δ.χ./ F και $f: V \rightarrow V$ λέμε f γραμμική ενδομορφώσιμος του V .

Ορισμός:

Έστω V δ.χ. $\mathbb{F}$ πεπερ. διαστάσεως $V \neq \{0\}$ και $f: V \rightarrow V$ γραμ. είνδ.
 $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση του V . Ορίζουμε
 $\chi_f(x) = \chi_{[f]_e^e}(x) \in \mathbb{F}[x]$ το καρκ. πολ/χο της f .

Παρατήρηση: Ο ορισμός του $\chi_f(x)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της
βάσης e του V , γιατί αν g άλλη βάση οι πίνακες $[f]_e^e$,
 $[f]_g^g$ είναι όμοιοι, άρα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολ/χο.

Παράδειγμα: Έστω $T: \mathbb{R}_2[y] \rightarrow \mathbb{R}_2[y]$ η παραχώγιση
δηλ. $T(p(y)) = p'(y)$ φανερά T

γραμμικός εναρροφισμός του $\mathbb{R}_2[y]$

Ποιο είναι το $\chi_T(x) \in \mathbb{R}[x]$;

Έστω $e = (e_1 = 1, e_2 = y, e_3 = y^2)$ κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$
Έχουμε $[T]_e^e = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ με χαρακτηριστικό πολ/ώνυμα

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 \quad \text{Διαισθητικά} \quad \chi_T(x) = -x^3.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - \underset{\uparrow}{(a+d)}x + \underset{\uparrow}{(ad-bc)}.$$

$\text{Tr}(A) \qquad \det A$

Λήμμα Για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ισχύει ότι ο σταθερός όρος του
 $\chi_A(x)$ είναι $= \det A$

Ο αντεστραφής του x^0 είναι $(-1)^n$.

Ο αντεσθετης του x^{n-1} στο $\chi_A(x)$ είναι ίσος με $(-1)^n \text{Tr}(A)$

Επειδη για πολυνο $p(x) \in F[x]$ ισχυει

ο ριζα του $p(x)$ αν και μονο αν ο σταθερος όρος του $p(x)$ είναι μηδεν έχουμε:

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Το 0 είναι ιδιοτιμη του A αν και μονο αν A
Οχι αντιστ.

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Υποθετουμε A διαγωνιζος επι του F. Τότε το
 $\chi_A(x)$ αναλυεται στο $F[x]$ εαν γινόμενο πρωτοβαθμιων.

(Ανλ. υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ οχι αναγκαστικα διαφορετικα αν
δυσ με: $\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$

→ (Το αντιστροφο δεν ισχυει.)

(π.χ) $0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ εχει χαρακ. πολυνο. $(x-1)^2$ αλλα δεν
ειναι διαγωνιζος.

Αποδ.: Αφοτι A διαγ. υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ και $P \in F^{n \times n}$ αντιστ. με

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P$$

$$\text{Αρα } \chi_A(x) = \det \begin{vmatrix} \lambda_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - x \end{vmatrix} = (-1)^n (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$$

Συμπέρασμα: Υποθ. οτι το $\chi_A(x)$ ΔΕΝ αναλυεται στο $F[x]$ σε
γινόμενο πρωτο βαθμιων. Τότε ο A ΔΕΝ ειναι διαγωνιζος στο $F[x]$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχουμε } \chi_A(x) = \det \begin{vmatrix} 1-x & a \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + (1-a)$$

$\Delta = 4a$ Αρα $\Delta < 0$ ($\Leftrightarrow a < 0$) ο A ΔΕΝ ειναι διαγωνιζος επι
ποτι το A ΔΕΝ γραφεται στο $\mathbb{R}[x]$ εαν γινε πρωτοβαθ του $\mathbb{R}$.

Από την επόμενη Πρόταση είμαστε ότι αν $\Delta > 0$ ($\Leftrightarrow a > 0$)
 ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.
 Τι γίνεται για $\underline{a=0}$; (Θα δούμε ότι διαγωνίσιμος).

Πρόταση:
 (χωρίς απόδ.)

Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$
 με $\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$

Αν $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ τότε A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$

Με άλλα λόγια αν ο A έχει n διακ. ιδιοτιμές ο A είναι διαγωνίσιμος

Πρόταση:

Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολ/μο του A αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων. Τότε Τ.Α.Ε.Ι

(i) A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$

(ii) Για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει ότι η αλφ. πολλαπλότητα του λ είναι ίση με τη γεωμετρική πολλαπλότητα του λ .

$\leadsto$ Με άλλα λόγια πρέπει για κάθε ιδιοτιμή λ η πολλαπλότητα του λ σαν ρίζα του $\chi_A(x)$ να είναι ίση με την διάσταση $\dim_{\mathbb{F}} V_A(\lambda)$. $\leftarrow$ ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Πρόταση:
 (χωρίς απόδ.)

Για κάθε ιδιοτιμή λ του A γεωμ. πολ/τα $\lambda \leq$ αλφ. πολ/τα λ .

(π.χ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Για } \underline{a=0} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \chi_A(x) = (x-1)^2$$

Ιδιοτιμές	αλφ. πολ/τα	γεωμ. πολ/τα
1	2	1

$\rightarrow$ Υπολ γεω. πολ/τα $V_A(1) : (A - I_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \xi_2 = 0$ Άρα $V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ βάση του.
 επομένως $V_A(1) \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} V_A(1) = 1$